DESARROLLO DE ALGORITMOS PARA MODELOS DE ECUACIONES SIMULTANEAS EN ALTAS PRESTACIONES

Jose Juan López Espín

Universidad Miguel Hernández

Motivación

- Los Modelos de Ecuaciones Simultáneas (M.E.S.) nacen como herramienta econométrica.
- Limitados por su gran necesidad computacional.
- Actualmente han comenzado a usarse en otras disciplinas.
- No conocemos la existencia de software en paralelo para la resolución de M.E.S. (aunque sí en secuencial).
- Solo se conocen estudios sobre algoritmos paralelos para M.E.S. de estimadores de información completa.
- No conocemos la existencia de estudios o software capaz de encontrar el mejor M.E.S. a partir de los datos de las variables.

¿Que es un M.E.S.?

El esquema de un modelo con N ecuaciones, N variables endógenas y K variables exógenas en forma matricial es:

$$BY^T + \Gamma X^T + u^T = 0$$

siendo:

$$Y = (y_1 \dots y_N) \ , \ X = (x_1 \dots x_K) \ , \ u = (u_1 \dots u_N)$$
$$B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \dots & \beta_{1,N} \\ & \dots & \\ \beta_{N,1} & \dots & \beta_{N,N} \end{pmatrix}, \ \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \dots & \gamma_{1,K} \\ & \dots & \\ \gamma_{N,1} & \dots & \gamma_{N,K} \end{pmatrix}$$

matrices densas con valores reales, siendo $\beta_{i,i} = -1 \ \forall \ i = 1, ..., N$.
El modelo estructural se puede expresar también en forma reducida:
$Y = X\Pi + v$, con $\Pi^T = -B^{-1}\Gamma \ , \ v^T = -B^{-1}u^T$.

¿Que es un M.E.S.?

Si se descompone B de la forma $B = diag(-1, ..., -1) + \tilde{B}$, la expresión anterior queda de la siguiente forma:

$$Y^T = \tilde{B} Y^T + \Gamma X^T + u^T$$

O en ecuaciones:

$$\begin{gathered}
y_1 = \gamma_{1,1} x_1 + \ldots + \gamma_{1,K} x_K + \beta_{1,2} y_2 + \beta_{1,3} y_3 + \ldots + \beta_{1,N} y_N + u_1 \\
y_2 = \gamma_{2,1} x_1 + \ldots + \gamma_{2,K} x_K + \beta_{2,1} y_1 + \beta_{2,3} y_3 + \ldots + \beta_{2,N} y_N + u_2 \\
\ldots \\
y_N = \gamma_{N,1} x_1 + \ldots + \gamma_{N,K} x_K + \beta_{N,1} y_1 + \ldots + \beta_{N,N-1} y_{N-1} + u_N
\end{gathered}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_K$ son variables exógenas, $y_1, y_2, \ldots, y_N$ son variables endógenas, y $u_1, u_2, \ldots, u_N$ son variables de ruido blanco. Todas ellas son vectores de dimensión d, siendo d el tamaño de la muestra.

Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

Algoritmo 1 Algoritmo MCO_{bas}

Entrada: $X \in \mathbb{R}^{d\times K}$, $Y \in \mathbb{R}^{d\times N}$
Salida: $\beta \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{d\times N}$
1: Hacer X^TX $\{\text{coste} \rightarrow 2K^2d\}$
2: Hacer X^TY $\{\text{coste} \rightarrow 2NKd\}$
3: Hacer $(X^TX)^{-1}(X^TY)$ resolviendo el sistema $X^TY = (X^TX)\beta$ $\{\text{coste} \rightarrow \frac{2}{3}K^3 + 2K^2N\}$
4: **Si** estimación=**Verdadero Entonces**
5: Hacer $\hat{Y} = X\beta$ $\{\text{coste} \rightarrow 2NKd\}$
6: **Fin si**

Utilizar las librerías de Blas y Lapack.

Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI)

- Solo se puede usar en ecuaciones exactamente identificadas ($K = k_i + n_i - 1$).
- Estima los valores de Π de la ecuación $Y = X\Pi + v$ mediante MCO.
- A continuación deduce los valores de la forma estructural ($0 = B_i Y^T + \Gamma_i X^T + u^T$) siguiendo la relación $-B_i\Pi = \Gamma_i$.

Algoritmo 2 Algoritmo *MCI*

Entrada: $X \in \mathbb{R}^{d\times K}, Y \in \mathbb{R}^{d\times N}, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{N\times K}$
Salida: $B \in \mathbb{R}^{N\times N}, \Gamma \in \mathbb{R}^{N\times K}$

1: $\Pi^T = MCO_{bas}(Y,X,$estimación=**Falso**$)$
2: **Para** i=1...N **Hacer**
3:     **Si** ecuación i es exactamente identificada **Entonces**
4:         Resolver $-B_i\Pi = \Gamma_i$
5:     **Fin si**
6: **Fin Para**

Mínimos Cuadrados en Dos Etapas (MC2E)

Estimar los valores de B y Γ en la expresión:

$$Y^T = \tilde{B}Y^T + \Gamma X^T + u^T$$

No es posible usar Mínimos Cuadrados (Y correlacionado con u).

Algoritmo 3 Algoritmo $MC2E_{bas}$

Entrada: $X \in \mathbb{R}^{d\times K}, Y \in \mathbb{R}^{d\times N}, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{N\times K}$
Salida: $B \in \mathbb{R}^{N\times N}, \Gamma \in \mathbb{R}^{N\times K}$
1: Estimar las variables proxy $\hat{Y} = MCO_{bas}(Y,X,$estimación=**Verdadero**)
2: Sustituir Y por $\hat{Y}$ resultando $Y^T = \tilde{B}\hat{Y}^T + \Gamma X^T + u^T$
3: **Para** $i = 1...N$ **Hacer**
4: Hacer $X_{e_i} = [X_i|\hat{Y}_i]$ {Usando B_i y Γ_i}
5: $\beta_i = MCO_{bas}(y_i,X_{e_i},$estimación=**Falso**)
6: Sustituir los valores de β_i en las incógnitas de B_i y Γ_i
7: **Fin Para**

MC2E basado en la descomposición de la inversa

La descomposición matricial que se va a usar está basada en el siguiente teorema:

Teorema

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -E \\ Id \end{pmatrix} (D - B^T A^{-1} B)^{-1} (-E^T | Id)$$

donde $E = A^{-1}B$.

Supongamos que se va a resolver la ecuación i-ésima usando MC2E.

$$y_i = \gamma_0 + \gamma_1 x_{i_1} + \ldots + \gamma_{k_i} x_{i_{k_i}} + \alpha_1 \hat{y}_{i_1} + \ldots + \alpha_{n_i} \hat{y}_{i_{n_i}} + \epsilon$$

Las matriz usada al aplicar MCO en la ecuación es $[X_i|\hat{Y}_i]$ (con dimensión $d \times (n_i + k_i - 1)$), calculándose la expresión $([X_i|\hat{Y}_i]^T [X_i|\hat{Y}_i])^{-1} [X_i|\hat{Y}_i]^T y_i$.

MC2E basado en la descomposición de la inversa

Usando el teorema previo, la inversa de la matriz:

$$\left(\begin{bmatrix} X_i^T \\ \hat{Y}_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i | \hat{Y}_i \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} X_i^T X_i & X_i^T \hat{Y}_i \\ \hat{Y}_i^T X_i & \hat{Y}_i^T \hat{Y}_i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (X_i^T X_i)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -(X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \hat{Y}_i \\ Id \end{pmatrix} (\hat{Y}_i^T \hat{Y}_i - Y_i^T X_i (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \hat{Y}_i)^{-1} (-Y_i^T X_i (X_i^T X_i)^{-1} | Id_{n_i-1})$$

- $X_i^T X_i$ se toma de $X^T X$, que se obtiene al calcular Π.
- $X_i^T \hat{Y}_i$ se toma de $X^T Y$, que se obtiene al calcular Π (ya que $X^T \hat{Y} = X^T Y$).
- $(X_i^T X_i)^{-1}[X_i^T \hat{Y}_i | Id_{k_i}]$ se tiene que calcular.
- $\hat{Y}_i^T X_i (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \hat{Y}_i$ se tiene que calcular.
- $\hat{Y}_i^T \hat{Y}_i$ se toma de $\hat{Y}^T \hat{Y}$, que es calculado antes.
- $\hat{Y}_i^T \hat{Y}_i - \hat{Y}_i^T X_i (X_i^T X_i) X_i^T \hat{Y}_i$ se tiene que calcular.
- $(\hat{Y}_i^T \hat{Y}_i - \hat{Y}_i^T X_i (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \hat{Y}_i)^{-1} (-\hat{Y}_i^T X_i (X_i^T X_i)^{-1} | Id_{n_i-1})$ se tiene que calcular.
- Multiplicar $\begin{pmatrix} -(X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \hat{Y}_i \\ Id_{n_i-1} \end{pmatrix}$ por la matriz resultante del paso anterior.
- Sumar la matriz resultante del paso anterior a $\begin{pmatrix} (X_i^T X_i)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

MC2E basado en la descomposición de la inversa

Se ha calculado la inversa de la matriz en la expresión de MCO para la ecuación i-esima $(([X_i|\hat{Y}_i]^T[X_i|\hat{Y}_i])^{-1}[X_i|\hat{Y}_i]^T y_i)$.

- La matriz $[X_i|\hat{Y}_i]^T y_i$ tiene que ser también calculada.
  - $X_i^T y_i$ se toma de $X^T Y$, que se obtiene al calcular Π.
  - $\hat{Y}_i^T y_i$ se toma de $\hat{Y}^T \hat{Y}$ puesto que $\hat{Y}^T \hat{Y} = \hat{Y}^T Y$.
- Se calcula la multiplicación de ambas matrices completando la expresión de MCO.

Proposición El número de flops realizados al resolver una ecuación de un M.E.S. por MCO_{bas} es mayor o igual que el número de flops realizados al resolver la misma ecuación por MCO_{inv}.

Estudio Experimental

Tiempo de ejecución (en segundos) y ratio entre el algoritmo $MC2E_{bas}$ y $MC2E_{inv}$:

N:	500	1000	1500	2000	2500
d:	500	500	1000	1000	1500
$MC2E_{bas}$	72.82	790.93	7031.96	19337.92	97874.21
$MC2E_{inv}$	12.91	198.16	1225.33	4192.10	10217.02
Ratio	5.64	3.99	5.74	4.61	9.58

Tiempo de ejecución (en segundos) y ratio comparativo entre el algoritmo MCI y el algoritmo $MC2E_{inv}$:

N:	500	1000	1500	2000	2500
d:	500	500	1000	1000	1500
$MC2E_{inv}$	22.76	289.12	1665.99	6165.98	14316.93
MCI	18.17	230.78	1073.21	3118.85	7181.54
Ratio	1.25	1.25	1.55	1.98	1.99

Paralelización de MCO

Utilizar las librerías de ScaLAPACK y PBLAS.
Importante: Tiempo de comunicación entre procesadores.

Algoritmo 6 Algoritmo $PMCO_{bas}$

Entrada: $X \in \mathbb{R}^{d \times K}$ e $Y \in \mathbb{R}^{d \times N}$ (distribuidas al estilo de ScaLAPACK)
Salida: $\beta \in \mathbb{R}^{K \times N}$ e $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{d \times N}$ (distribuidas al estilo de ScaLAPACK)

1: Hacer $X^T X$ {Multiplicación en paralelo}
2: Hacer $X^T Y$ {Multiplicación en paralelo}
3: Hacer $(X^T X)^{-1}(X^T Y)$ resolviendo el sistema $X^T Y = (X^T X)\beta$ en paralelo
4: **Si** estimación=**Verdadero Entonces**
5: Hacer $\hat{Y} = X\beta$ {Multiplicación en paralelo}
6: **Fin si**

Paralelización de MCI

Algoritmo 7 Algoritmo *PMCI*

Entrada: $X \in \mathbb{R}^{d\times K}$ e $Y \in \mathbb{R}^{d\times N}$ (distribuidas al estilo de ScaLAPACK), $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{N\times K}$ (distribuidas $\frac{N}{p}$ filas por procesador)

Salida: $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{N\times K}$ (distribuidas $\frac{N}{p}$ filas por procesador)

```
Π^T = PMCO_bas(Y,X,Falso)
Distribuir Π en todos los procesadores
EN PARALELO cada procesador q = 0, ..., p − 1 HACE
Para j=1...N/p Hacer
    i = q + (j − 1)p + 1
    Si ecuación i es exactamente identificada Entonces
        Resolver −B_i Π = Γ_i
    Fin si
Fin Para
FIN PARALELO
```

Paralelización de MC2E

Algoritmo 8 Algoritmo $PMC2E_{inv}$

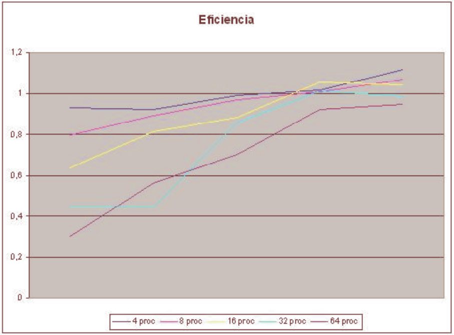
Entrada: $X \in \mathbb{R}^{d\times K}$ e $Y \in \mathbb{R}^{d\times N}$ (distribuidas al estilo de ScaLAPACK), $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{N\times K}$ (distribuidas $\frac{N}{p}$ filas por procesador)

Salida: $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{N\times K}$ (distribuidas $\frac{N}{p}$ filas por procesador)

```
Ŷ = PMCO_bas(Y,X,Verdadero) {guardando Π, XᵀX y XᵀY}
Hacer ŶᵀŶ {multiplicaciones en paralelo}
Distribuir Π, XᵀX, XᵀY, Ŷ, ŶᵀŶ a todos los procesadores
EN PARALELO cada procesador q = 0, ..., p − 1 HACE
Para j=1...N/p Hacer
    i = q + (j − 1)p + 1
    β_i = MCO_inv(y_i, Ŷ, X, XᵀX, XᵀY, ŶᵀŶ)
    Sustituir los valores de β_i en las incógnitas de B_i y Γ_i
Fin Para
FIN PARALELO
```

Estudio experimental

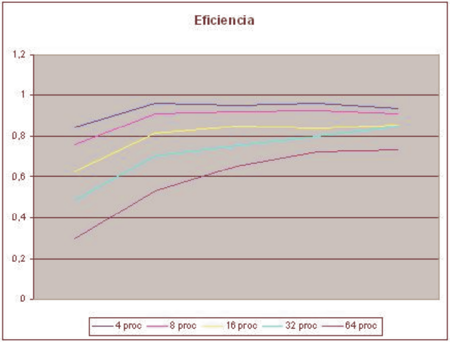
Eficiencia y speed-up del algoritmo *PMCI*.



N : / d :	500 / 500	1000 / 500	1500 / 1000	2000 / 1000	2500 / 1500
p	Speed-up				
4	3.72	3.69	3.97	**4.06**	**4.46**
8	6.37	7.15	7.77	**8.07**	**8.54**
16	10.22	13.02	14.11	**16.93**	**16.67**
32	14.44	14.29	27.42	**32.40**	31.55
64	19.27	35.96	44.92	59.03	60.79

Estudio experimental

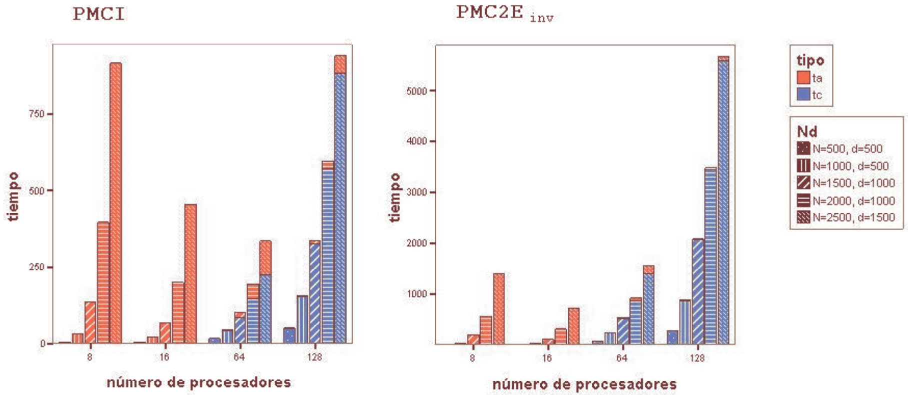
Eficiencia y speed-up del algoritmo $PMC2E_{inv}$.



N : d :	500 500	1000 500	1500 1000	2000 1000	2500 1500
p	Speed-up				
4	3.39	3.85	3.82	3.85	3.75
8	6.07	7.30	7.34	7.42	7.28
16	10.00	13.06	13.61	13.44	13.69
32	15.55	22.45	24.05	25.61	27.25
64	18.96	33.94	41.61	46.42	46.98

Estudio experimental

Gráfico comparativo de los tiempos de comunicación (tc) y de operaciones aritméticas (ta) de los algoritmos *PMCI* y $PMC2E_{inv}$:



MC2E mediante reflexiones de Householder

- Hacer la descomposición QR de X ($X = Q \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mediante reflexiones de Householder).
- Calcular $\hat{Y}$

$$\hat{Y} = X(X^TX)^{-1}X^TY = QR(R^TQ^TQR)^{-1}R^TQ^TY =$$
$$Q \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} (R_1^{-1}R_1^{-T})[R_1^T|0]Q^TY = Q \begin{pmatrix} Id_K \\ 0 \end{pmatrix} [Id_K|0]Q^TY$$
$$= Q \begin{pmatrix} Id_K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^TY = Q \begin{pmatrix} Id_K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- En cada ecuación i:
  - Hacer la descompsición QR de la matriz $X_{e_i} = Q_iR_i$ mediante reflexiones de Householder.
  - Calcular $\hat{\beta}_i = (X_{e_i}^TX_{e_i})^{-1}X_{e_i}^Ty_i = [R_{i,1}^{-1}|0]Q_i^Ty_i = [R_{i,1}^{-1}|0]\tilde{y}_i = R_{i,1}^{-1}\tilde{y}_{i,1}$

Algoritmo para MC2E mediante reflexiones de Householder

Algoritmo 10 Algoritmo $MC2E_H$

Entrada: $X \in \mathbb{R}^{d\times K}$, $Y \in \mathbb{R}^{d\times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{N\times K}$

Salida: $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{N\times K}$

1: Obtener Q y R (desc. QR de X) $\{\text{coste} \rightarrow \frac{4}{3}K^2(3d-K)\}$

2: $\tilde{Y} = Q^T Y$ $\{\text{coste} \rightarrow 2NK(2d-K)\}$

3: $\hat{Y} = Q \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\{\text{coste} \rightarrow 2NK^2\}$

4: **Para** i=1...N **Hacer**

5: Obtener Q_i y R_i (desc. QR de X_{e_i}) $\{\text{coste} \rightarrow \frac{4}{3}(n_i+k_i-1)^2(3d-(n_i+k_i-1))\}$

6: $\tilde{y}_i = Q_i^T y_i$ $\{\text{coste} \rightarrow 2(n_i+k_i-1)(2d-(n_i+k_i-1))\}$

7: $\beta_i = R_{i,1}^{-1}\tilde{y}_{i,1}$ $\{\text{coste} \rightarrow (n_i+k_i-1)^2\}$

8: Sustituir los valores de β_i en las incógnitas de B_i y Γ_i

9: **Fin Para**

Estudio Experimental

Tiempo de ejecución (en segundos) y ratio comparativo entre el algoritmo $MC2E_{bas}$, $MC2E_{inv}$ y $MC2E_H$.

N:	500	1000	1500	2000	2500
d:	500	500	1000	1000	1500
Alg.	Tiempo	Tiempo	Tiempo	Tiempo	Tiempo
$MC2E_{bas}$	72.82	790.93	7031.96	19337.92	97874.21
$MC2E_{inv}$	12.91	198.16	1225.33	4192.10	10217.02
$MC2E_H$	26.53	257.10	2363.64	5457.78	16825.37
	Ratio				
$MC2E_{bas}/MC2E_{inv}$	5.64	3.99	5.74	4.61	9.58
$MC2E_H/MC2E_{inv}$	2.05	1.30	1.93	1.30	1.65

MC2E mediante rotaciones de Givens

Se detectan las siguientes deficiencias en el algoritmo anterior:

- No se aprovecha la descomposición QR de X en la descomposición en cada ecuación.
- El cálculo de la matriz $\hat{Y}$ exige aplicar dos veces los reflectores de Householder a la matriz Y.

Se propone: Obtener la descomposición QR de cada X_{e_i} mediante rotaciones de Givens haciendo ceros los elementos no nulos por debajo de la diagonal principal.

- Hacer la descomposición QR de $[X|\hat{Y}]$ de la cual se obtendrán las descomposiciones QR de las X_{e_i}.
- Hacer la descomposición QR de X mediante reflexiones de Householder.
- Calcular $Q^T[X|\hat{Y}]=[Q^TX|Q^T\hat{Y}] = [R|Q^T\hat{Y}] = \begin{pmatrix} R_1 & \tilde{Y}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

MC2E mediante rotaciones de Givens II

Resolver la ecuación i-ésima $y_i = X_i b_i + Y_i \Gamma_i + \epsilon_i$ cuya matriz asociada es $X_{e_i} = [X_i | \hat{Y}_i]$.

La matriz se puede expresar de la forma $X_{e_i} = [X | \hat{Y}] S_i$ donde S_i es una matriz de selección.

$$Q^T X_{e_i} = Q^T [X | \hat{Y}] S_i = [R | Q^T \hat{Y}] S_i = \begin{pmatrix} R_1 & \tilde{Y}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S_i = \begin{pmatrix} R_{i,1} & \tilde{Y}_{i,1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo $R_{i,1}$ e $\tilde{Y}_{i,1}$ las K primeras filas de la matriz resultante de la multiplicación.

Es necesario obtener la descomposición QR de X_{e_i}, por lo que hay que encontrar una matriz ortogonal que multiplicada a la anterior dé como resultado una matriz triangular superior.

$$\tilde{Q}_i^T = \left(\prod_{n=1}^{n_i - 1} \prod_{j=1}^{K-n} G^{(i)}_{K-j-k_i, K-j-k_i+1} \right) \left(\prod_{n=1}^{k_i} \prod_{j=1}^{\lambda_{i,n} - n} G^{(n)}_{\lambda_{i,n}-j, \lambda_{i,n}-j+1} \right)$$

MC2E mediante rotaciones de Givens III

La siguiente figura muestra la secuencia de eliminación de elementos en el proceso de retriangularización mediante rotaciones de Givens de una matriz $X \in \mathbb{R}^{7\times 5}$. La entrada i (i=1,...,6) indica el elemento reducido a cero en la i-ésima rotación, multiplicando a la izquierda por la matriz $\tilde{Q}_i^T = G_{5,6}^{(5)} G_{5,7}^{(5)} G_{4,5}^{(4)} G_{4,6}^{(4)} G_{3,4}^{(3)} G_{2,3}^{(2)}$.

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & 2 & \bullet & \bullet \\ & & & 4 & \bullet \\ & & & 3 & 6 \\ & & & & 5 \end{pmatrix}$$

Comparativa entre $MC2E_H$ y $MC2E_G$

Tiempo de ejecución (en segundos) y ratio, cuando se varía el tamaño del problema. Se muestra el promedio (número grande) y la desviación típica (subíndice) de 5 medidas para el mismo tamaño del problema.

Tam. del problema			Tiempo	Tiempo	
N	K	d	Householder	Givens	Ratio
100	100	500	$0.50_{0.02}$	$0.15_{0.00}$	$3.35_{0.06}$
100	100	1000	$1.06_{0.03}$	$0.16_{0.00}$	$6.63_{0.21}$
100	200	500	$1.39_{0.06}$	$0.67_{0.02}$	$2.09_{0.09}$
100	200	1000	$3.23_{0.11}$	$0.70_{0.00}$	$4.60_{0.13}$
200	200	500	$3.39_{0.08}$	$1.90_{0.03}$	$1.79_{0.01}$
200	200	1000	$7.85_{0.32}$	$1.94_{0.05}$	$4.05_{0.07}$
200	400	500	$10.25_{0.14}$	$9.16_{0.13}$	$1.12_{0.02}$
200	400	1000	$23.28_{0.20}$	$9.31_{0.16}$	$2.50_{0.05}$
400	400	1000	$56.60_{2.47}$	$28.05_{0.41}$	$2.02_{0.07}$
400	400	1500	$98.85_{2.84}$	$28.62_{0.31}$	$3.45_{0.08}$
400	600	1000	$108.68_{3.94}$	$74.55_{1.18}$	$1.46_{0.03}$
400	600	1500	$200.76_{5.57}$	$75.13_{0.91}$	$2.67_{0.05}$
800	800	2000	$1319.30_{12.58}$	$438.14_{2.24}$	$3.01_{0.01}$
800	800	2500	$1889.01_{20.66}$	$440.61_{3.57}$	$4.29_{0.02}$
800	1000	2000	$2067.94_{16.62}$	$741.28_{4.60}$	$2.79_{0.01}$
800	1000	2500	$2894.90_{28.64}$	$741.77_{5.43}$	$3.90_{0.02}$

Conclusiones

- Se han desarrollado algoritmos para los estimadores MCI y MC2E
- Se han mejorado los algoritmos utilizando descomposiciones matriciales (descomposicion de la inversa y QR)
- Se han desarrollado versiones en paralelo en memoria compartida y distribuida obteniendose speed-ups satisfactorios
- Se han aplicado los algoritmos a problemas reales